Método de Multiplicadores de Lagrange: Una Versión Animada.

José D. Flores, PhD. *
Professor of Mathematics
The University of South Dakota
jflores@usd.edu

Noviembre 2004

Abstract

Resúmen: En este trabajo presentamos un conjunto de animaciones que muestran gráficamente el resultado del Método de Multiplicadores de Lagrange. Las animaciones fueron producidas con el software Mathematica y exportadas al los programas LiveGraphic3D, y a FLASH-MX. El propósito fundamental de estas animaciones es proveer al estudiante con una version gráfica y animada de este concepto teórico. El objetivo de este trabajo es ofrecer una visualización del resultado de Lagrange, para ello las funciones has sido seleccionada arbitrariamente preocupándonos que las animaciones ofrezcan la mayor y mejor cantidad de detalles para entender el concepto visualmente. Al final del articulo ofrecemos un enlace a nuestra página de *webMathematica* donde se puede experimentar con otros problemas en forma interactiva.

El método de Multiplicadores de Lagrange dice que dadas $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos funciones con valores reales de clase $C^1(U)$, con $\mathbf{x}_0 \in U$, $g(\mathbf{x}_0) = c$ y $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = c\}$. Asumiendo que $\nabla g(\mathbf{x}_0) \neq 0$. Si f restrigida a S tiene un máximo y/o mínimo relativo en $\mathbf{x}_0 \in S$, entonces existe un número real λ tal que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \lambda \nabla g(\mathbf{x}_0)$$

El Método de los Multiplicadores de Lagrange nos permite encontrar los puntos $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ que optimizan (producen máximos y/o mínimos) una función dada $f(\mathbf{x})$, sujeta a la restricción $g(\mathbf{x}) = 0$.

Esta idea es esencialmente la extension natural del metodo usual para funciones de una variable, buscar máxinos y/o mínimos entre sus puntos criticos, es decir, los puntos $\mathbf{x}$ en que $f'(\mathbf{x}) = 0$. En este caso consideramos $F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \lambda g(\mathbf{x})$. Es claro que $\max F(\mathbf{x}) = \max f(\mathbf{x})$. Asi basta buscar valores de x and λ en los cuales $\nabla F = 0$, es decir,

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda \nabla g(\mathbf{x})$$

*Sitio web: http://usd.edu/~jflores

Observaciones:

1.- La condición del Método de Lagrange es una condición necesaria pero no una condición suficiente. Por ejemplo si consideramos la funcion $f(x, y) = x = y$ sujeta a la condición que $xy = 1$, es decir $g(x, y) = xy - 1 = 0$, se obtiene $\lambda = 1$, y $(x_0, y_0) = (\pm 1, \pm 1)$, pero f no tiene ni maximo ni minimo. Esto se puede observar claramente an la figura 1.

2.- En el caso general que se tengan k restricciones, $g_1(x) = 0$, $g_2(x) = 0, ..., g_k(x) = 0$, el método usa la formula

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \lambda_1 \nabla g_1(\mathbf{x}) + \lambda_2 \nabla g_2(\mathbf{x}) + ... + \lambda_k \nabla g_k(\mathbf{x})$$

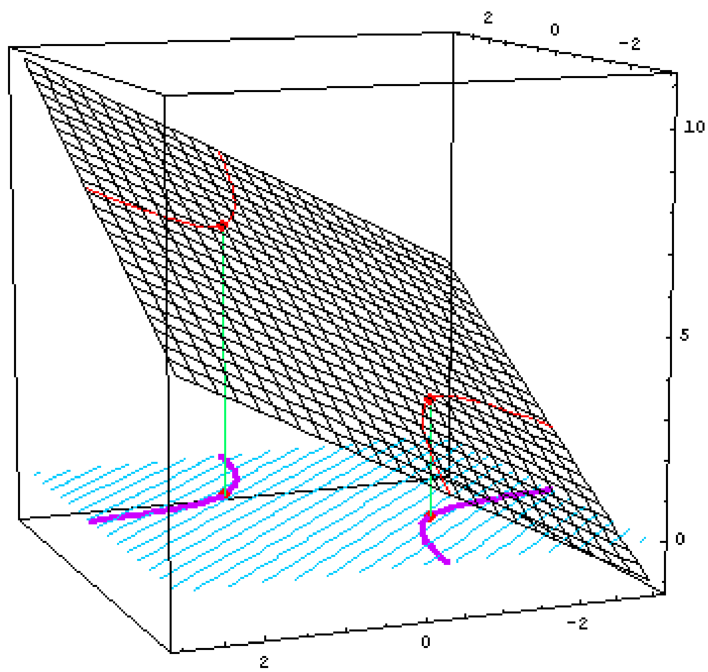

Figura 1: f(x,y) = x+y sujeta a xy=1.

Nota 1: En esta presentacion usaremos animaciones para visualizar este resultado de Lagrange. En nuestro ejemplo usamos la siguiente notación $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$

Ejemplo:

Optimizar la función $f(x, y) = x^3 - xy + y^2 + 3$ sujeta a la condición que los puntos (x, y) satisfagan la ecuación de la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$. Asi la condición $g(x, y) = 0$ esta dada por la ecuación

$$g(x, y) = x^2 + 2y^2 - 1 = 0$$

Este problema esta representado en la figura 2. En la figura 2 la condición $g(x, y) = 0$ esta presentada por la elipse color violeta en el plano xy.

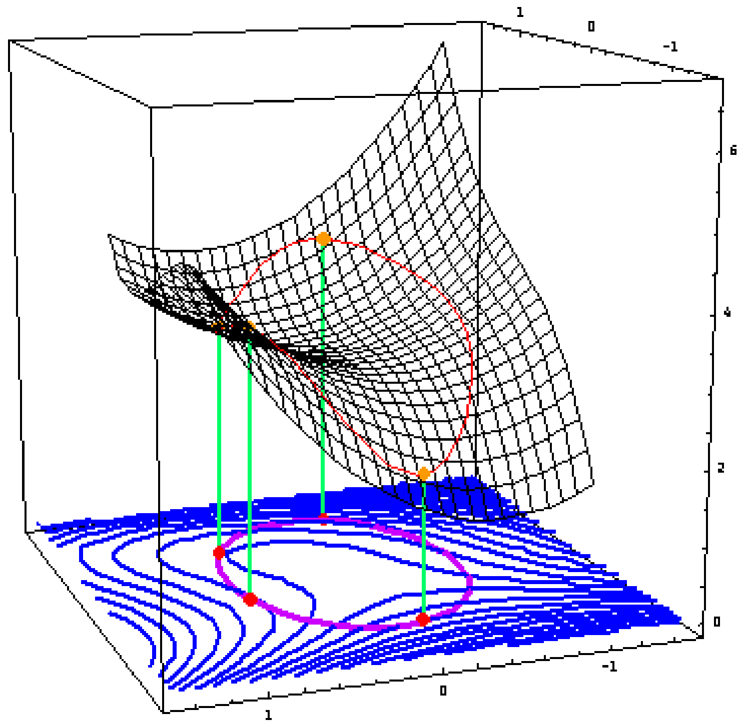

Figura 2: f(x,y) y g(x,y) = 0.

El la figura 2 se observa que mientras los puntos (x, y) recorren la elipse $g(x, y) = 0$ los valores $f(x, y)$ generan cuatro puntos criticos. Usando el mouse en la animación 1 y la animación 2 se puede manipular el gráfico para visualizar distintos aspectos del problema presentado.

Nota 2: Use el mouse para rotar los gráficos. Situé la flecha del "mouse" sobre la figura y presionado el botón izquierdo del "mouse" mueva la figura.

También se puede usar la animación 3, oprimiendo el primer botón "superficie z" para visualizar que el problema consiste en encontrar los extremos de la función $f(x, y)$ restringidos a puntos (x, y) que satisfacen solamente la condición $g(x, y) = 0$.

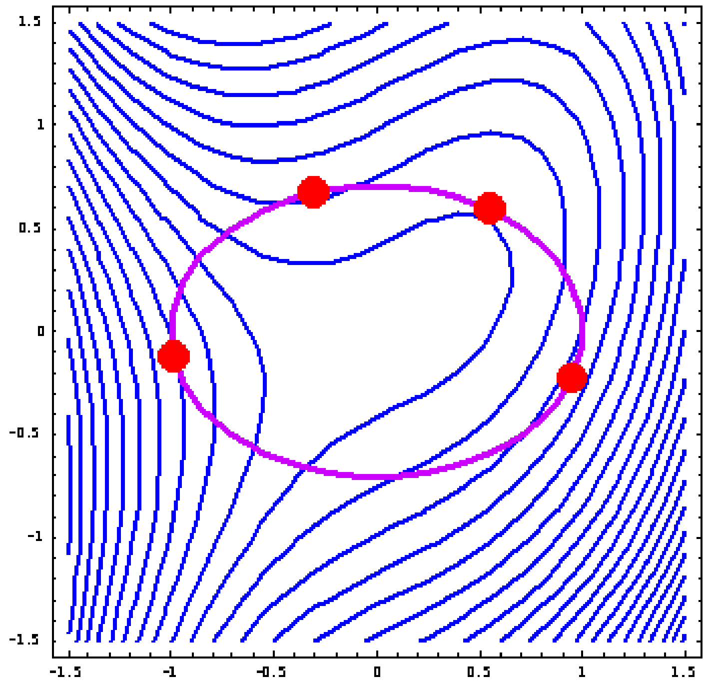

Figura 3: Tangencia de las cuervas de nivel y g(x,y)=0

Es importante observar (ver figura 3) que los puntos en el plano xy donde se producen los valores extremos es precisamente donde las curvas de nivel son *tangentes* a la curva dada por la condición g(x,y) = 0 , curva color violeta.

Si observamos los planos horizontales que generan las curvas de nivel podemos ver la relación de tangencia entre las curvas de nivel, los puntos extremos y la elipse. Esta observación esta graficada en la figura 4.

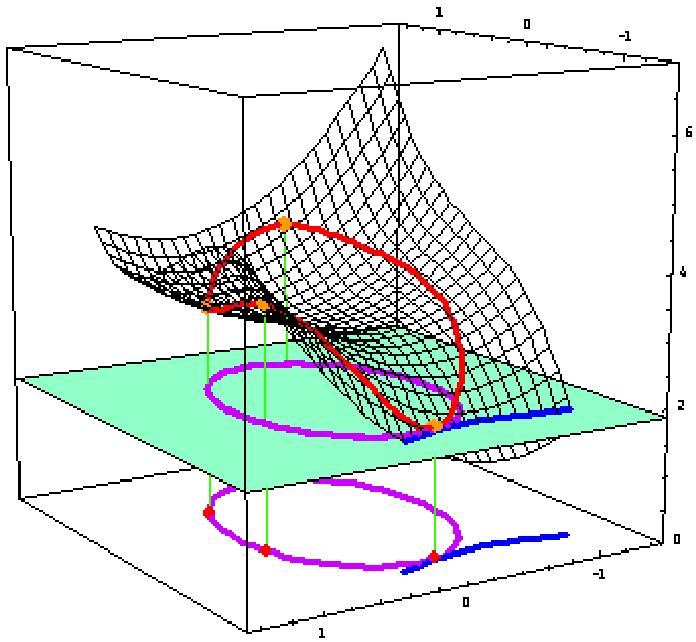

Figura 4: Curvas de nivel y planos horizontales

Usando la animación 4 se puede visualizar esta propiedad mas detalladamente.

Así podemos ver en nuestro ejemplo que es precisamente en aquellos puntos tangenciales donde se puede visualizar el resultado de Lagrange, es decir donde los vectores gradientes de la función $f(x, y)$ son paralelos a los vectores gradientes de la función $g(x, y)$, ver la figura 5.

La visualización del ejemplo se completa usando la animación 5, donde los vectores gradientes de f están fijos y los vectores gradientes de g recorren la elipse $g(x, y) = 0$.

Finalmente la animación 6 presenta ambos vectores gradientes evaluados el los puntos de elipse $g(x, y) = 0$ mostrando claramente el resultado del Método de Lagrange "el vector $\nabla f(\mathbf{x})$ es múltiplo de el vector $\nabla g(\mathbf{x})$ el los puntos de tangencia, es decir los puntos extremos.

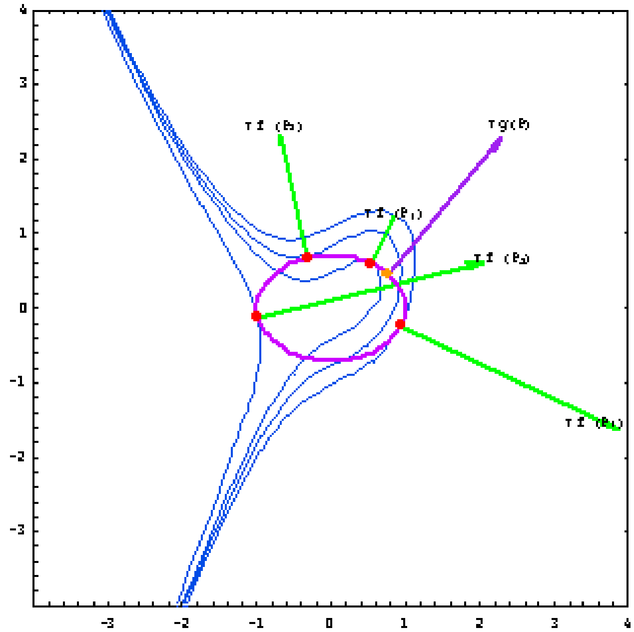

Figura 5: Curvas de niveles, $\nabla f(x,y)$ y $\nabla g(x,y)$.

Para terminar nuestro ejemplo debemos decir que desde el punto de vista computacional la ecuación de Lagrange se reduce resolver un sistema de ecuaciones en las variables x, y y λ

La computación de los valores extremos se obtienen aplicando la ecuacion de Lagrange

$$\left\langle 3x^2 - y, -x + 2y \right\rangle = \lambda \left\langle 2x, 2y \right\rangle$$

y resolviendo el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 3x^2 & - & y & = & 2\lambda x \\ -x & + & 2y & = & 2\lambda y \\ x^2 & + & y^2 & = & 1 \end{array} \right.$$

Y para resolver este sistema se pueden usar herramientas tecnológicas como *webMathematica.*

Para practicar se puede experimentar usando *webMathematica at USD* en nuestro sitio en la web en el departamento de matemáticas en "The University of South Dakota."